

Topología I

Examen XV

FACULTAD
DE
CIENCIAS
UNIVERSIDAD DE GRANADA



Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada



Esta obra está bajo una Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional (CC BY-NC-ND 4.0).

Eres libre de compartir y redistribuir el contenido de esta obra en cualquier medio o formato, siempre y cuando des el crédito adecuado a los autores originales y no persigas fines comerciales.

Topología I

Examen XV

Los Del DGIIM, losdeldgiim.github.io

Roxana Acedo Parra

Granada, 2026

Asignatura Topología I.

Curso Académico 2025/2026.

Grado Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Grupo Único.

Profesor Antonio Alarcón López.

Descripción Convocatoria Extraordinaria.

Fecha 9 de febrero de 2026.

Duración 180 minutos.

Ejercicio 1. En $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$, se considera la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \{\{0\}\} \cup \{[x - \epsilon, x + \epsilon[\mid 0 < x < 1, 0 < \epsilon \leq \min\{x, 1 - x\}\} \cup \\ \{]1 - \epsilon, 1] \mid 0 < \epsilon \leq 1\} \cup \{\{0, x\} \mid x \in [2, 3]\}.$$

- Demuestra que existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\mathcal{B}$ es base de $(X, \mathcal{T})$.
- Calcula la adherencia y el interior en $(X, \mathcal{T})$ de los siguientes subconjuntos $B_1 = \{0\}$ y $B_2 = X \cap \mathbb{Q}$.
- ¿Es $(X, \mathcal{T})$ T_1 ? ¿Es T_2 ? ¿Es 1AN? ¿Es 2AN?
- ¿Es $(X, \mathcal{T})$ conexo? ¿Es compacto?
- Se considera el conjunto $A = \{0\} \cup [2, 3]$. Determina si el espacio topológico cociente $(X/A, \mathcal{T}/A)$ es homeomorfo a $([0, 1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]})$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}$.
- Se considera el conjunto $E = \{0, 1\} \cup [2, 3]$. Determina si el espacio topológico cociente $(X/E, \mathcal{T}/E)$ es homeomorfo a $(]0, 1], \mathcal{T}_u|_{]0,1]})$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice T_3 si es T_1 y cumple que para cada subconjunto cerrado $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y cada punto $x \in X \setminus C$ existen abiertos $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $C \subset A_1$, $x \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

- Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_1 . Demuestra que $(X, \mathcal{T})$ es T_3 si, y solo si, para cada punto $x \in X$ y cada abierto $U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$, existe un abierto $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset U$.
- Demuestra que T_3 es un invariante topológico.

Ejercicio 1. En $X = [0, 1] \cup [2, 3] \subset \mathbb{R}$, se considera la familia de subconjuntos

$$\mathcal{B} = \{\{0\}\} \cup \{[x - \epsilon, x + \epsilon] \mid 0 < x < 1, 0 < \epsilon \leq \min\{x, 1 - x\}\} \cup \{[1 - \epsilon, 1] \mid 0 < \epsilon \leq 1\} \cup \{\{0, x\} \mid x \in [2, 3]\}.$$

a) Demuestra que existe una única topología $\mathcal{T}$ en X tal que $\mathcal{B}$ es base de $(X, \mathcal{T})$.

Veamos que la familia $\mathcal{B}$ verifica

B1: X puede escribirse como unión de elementos de $\mathcal{B}$. Esto es sencillo de comprobar ya que

$$X = (0, 1] \cup \left(\bigcup_{x \in [2, 3]} \{0, x\} \right)$$

B2: Sean $B, B' \in \mathcal{B}$ y $x \in B \cap B'$ existe $\tilde{B} \in \mathcal{B}$ tal que $x \in \tilde{B} \subseteq B \cap B'$.

Veamos qué elementos de $\mathcal{B}$ pueden tener intersección.

- El elemento $\{0\}$ solo tiene intersección con los elementos de la forma $\{0, x\}$ con $x \in [2, 3]$. En este caso $\{0\} \cap \{0, x\} = \{0\} \in \mathcal{B}$.
Si $B = \{0, x\}$ y $B' = \{0, y\}$ con $x, y \in [2, 3]$ tenemos $\{0, x\} \cap \{0, y\} = \{0\} \in \mathcal{B}$.
- Supongamos ahora que $B = (1 - \lambda, 1]$ y $B' = (1 - \lambda', 1]$ para $0 < \lambda \leq \lambda' \leq 1$. Entonces se tiene

$$(1 - \lambda, 1] \cap (1 - \lambda', 1] = (1 - \lambda, 1] \in \mathcal{B}$$

- Supongamos que $B = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ para $0 < x < 1, 0 < \epsilon \leq \min\{x, 1 - x\}$ y $B' = (y - \delta, y + \delta)$ para $0 < y < 1, 0 < \delta \leq \min\{y, 1 - y\}, \max\{x - \epsilon, y - \delta\} < \min\{x + \epsilon, y + \delta\}$. En este caso tenemos

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap (y - \delta, y + \delta) = \left(\frac{m_1 + m_2}{2} - \epsilon_0, \frac{m_1 + m_2}{2} + \epsilon_0 \right) \in \mathcal{B}$$

donde $m_1 = \max\{x - \epsilon, y - \delta\}$, $m_2 = \min\{x + \epsilon, y + \delta\}$ y $\epsilon_0 = \frac{m_2 - m_1}{2}$.

- Supongamos que $B = (x - \epsilon, x + \epsilon)$ para $0 < x < 1, 0 < \epsilon \leq \min\{x, 1 - x\}$ y $B' = (1 - \lambda, 1]$ para $0 < \lambda \leq 1, 1 - \lambda < x + \epsilon$. Entonces tenemos

$$(x - \epsilon, x + \epsilon) \cap (1 - \lambda, 1] = (1 - \lambda, x + \epsilon) = (m_3 - \epsilon_1, m_3 + \epsilon_1) \in \mathcal{B}$$

donde $m_3 = \frac{x + \epsilon + 1 - \lambda}{2}$ y $\epsilon_1 = \frac{x + \epsilon - 1 + \lambda}{2}$.

En los dos últimos casos también podemos argumentar que $B \cap B'$ es un abierto de $\mathcal{T}_u$. Así si $z \in B \cap B'$, teniendo en cuenta que $\{(z - \epsilon, z + \epsilon) \mid \epsilon > 0\}$ es una base de entornos en z de $\mathcal{T}_u$ podemos encontrar un $\epsilon > 0$ suficientemente pequeño para $(z - \epsilon, z + \epsilon) \subset B \cap B'$.

Finalmente, observemos que para los puntos en $(0, 1]$, los elementos de $\mathcal{B}$ coinciden con una base de $\mathcal{T}_u|_{(0, 1]}$. Por tanto, las bases de entornos en $x \in (0, 1]$ para $\mathcal{T}_u|_{(0, 1]}$ son bases de entornos en esos puntos para la topología $\mathcal{T}$. Se tienen

entonces las siguientes bases de entornos para un punto $x \in X$ de la topología $\mathcal{T}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_0 &= \{\{0\}\}, \\ \mathcal{B}_x &= \{(x - \epsilon, x + \epsilon) \mid 0 < \epsilon \leq \min\{x, 1 - x\}\} \quad \text{si } x \in (0, 1), \\ \mathcal{B}_1 &= \{(1 - \epsilon, 1] \mid 0 < \epsilon \leq 1\}, \\ \mathcal{B}_x &= \{\{0, x\}\} \quad \text{si } x \in [2, 3].\end{aligned}$$

- b) Calcula la adherencia y el interior en $(X, \mathcal{T})$ de los siguientes subconjuntos $B_1 = \{0\}$ y $B_2 = X \cap \mathbb{Q}$.

En primer lugar observamos que el conjunto B_1 es abierto ya que está en $\mathcal{B}$ y por tanto $\text{int}(B_1) = \{0\}$. Veamos ahora que $\text{cl}(B_1) = \{0\} \cup [2, 3]$. Efectivamente, en primer lugar tenemos $0 \in \text{cl}(B_1)$. Además $x \in [2, 3]$ tenemos que el único elemento de la base de entornos en x de $\mathcal{T}$ es $\{0, x\}$ y por tanto $B_1 \cap \{0, x\} = \{0\} \neq \emptyset$. Luego $\{0\} \cup [2, 3] \subset \text{cl}(B_1)$. Por otra parte $\{0\} \cup [2, 3] = X \setminus (0, 1]$ luego es un cerrado por ser $(0, 1]$ un abierto. Como la clausura es el menor cerrado que contiene al conjunto deducimos que $\text{cl}(B_1) \subset \{0\} \cup [2, 3]$. De la doble inclusión deducimos la igualdad $\text{cl}(B_1) = \{0\} \cup [2, 3]$.

Veamos ahora que $\text{int}(B_2) = \{0\} \cup ([2, 3] \cap \mathbb{Q})$. Observemos que para cada $x \in [2, 3] \cap \mathbb{Q}$, $x \in \{0, x\} \subset \{0\} \cup ([2, 3] \cap \mathbb{Q})$, luego es entorno de todos sus puntos y por tanto $\{0\} \cup ([2, 3] \cap \mathbb{Q})$ es abierto. Como $\text{int}(B_2)$ es el abierto más grande contenido en B_2 tenemos $\{0\} \cup ([2, 3] \cap \mathbb{Q}) \subset \text{int}(B_2)$. Por otra parte, si $x \in (0, 1] \cap \mathbb{Q}$ es fácil comprobar que $x \notin \text{int}(B_2)$ ya que cualquier entorno básico de x de la forma $(x - \epsilon, x + \epsilon)$ contiene números irracionales y por tanto nunca puede estar contenido en B_2 . Concluimos por tanto que $\text{int}(B_2) = \{0\} \cup ([2, 3] \cap \mathbb{Q})$.

Veamos ahora que B_2 es denso, es decir $\text{cl}(B_2) = X$. De hecho si consideramos $x \in (0, 1)$, sea racional o irracional, tenemos que cualquiera de sus entornos básicos $(x - \epsilon, x + \epsilon)$, $0 < \epsilon \leq \min\{x, 1 - x\}$ contiene números racionales y por tanto $x \in \text{cl}(B_2)$. Análogamente si $x \in [2, 3]$, sea racional o irracional, su entorno básico $\{0, x\}$ contiene al 0 que es un número racional y por tanto $x \in \text{cl}(B_2)$. Concluimos entonces que $\text{cl}(B_2) = X$.

- c) ¿Es $(X, \mathcal{T})$ T_1 ? ¿Es T_2 ? ¿Es 1AN? ¿Es 2AN?

Veamos que $(X, \mathcal{T})$ no es T_1 . Efectivamente, consideremos los puntos $x = 0$ y $y = 2$. Cualquier entorno de $y = 2$ contiene a 0 y por tanto el espacio topológico no es T_1 . Como no es T_1 no puede ser tampoco T_2 .

Veamos ahora que el espacio es 1AN. Para ello observemos que en el caso $x = 0$ y $x \in [2, 3]$ la base de entornos dada en el apartado a) es finita y por tanto numerable. Si $x \in (0, 1)$ podemos considerar la base de entornos numerable:

$$\mathcal{B}_x = \left\{ \left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n} \leq \min\{x, 1 - x\} \right\}.$$

Análogamente, para $x = 1$ tenemos la base de entornos numerable:

$$\mathcal{B}_1 = \left\{ \left(1 - \frac{1}{n}, 1 \right] \mid n \in \mathbb{N}, 0 < \frac{1}{n} \leq 1 \right\}.$$

Por tanto concluimos que $(X, \mathcal{T})$ es 1AN.

Veamos ahora que $(X, \mathcal{T})$ no es 2AN. Si $(X, \mathcal{T})$ fuese 2AN tendríamos que $([2, 3], \mathcal{T}_{[2,3]})$ sería 2AN por ser esta una propiedad hereditaria. Pero $\mathcal{T}_{[2,3]}$ es la topología discreta en $[2, 3]$ y esta topología sabemos que no es 2AN si el conjunto no es numerable.

d) ¿Es $(X, \mathcal{T})$ conexo? ¿Es compacto?

Es sencillo comprobar que $(X, \mathcal{T})$ no es conexo.

PRIMERA FORMA: Observemos que el conjunto $Y = \{0\} \cup [2, 3]$ es cerrado (visto en el apartado b), abierto (porque es entorno de todos sus puntos) e $Y \neq X$, $Y \neq \emptyset$.

SEGUNDA FORMA: Denotemos por

$$A = (0, 1], \quad B = \bigcup_{x \in [2,3]} \{0, x\},$$

entonces A y B son no vacíos, abiertos, disjuntos, $A \cup B = X$ luego X no es conexo.

Veamos ahora que $(X, \mathcal{T})$ no es compacto.

PRIMERA FORMA: Si $(X, \mathcal{T})$ fuese compacto tendríamos que $([2, 3], \mathcal{T}_{[2,3]})$ sería un compacto por ser $[2, 3] \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ ($[2, 3] = X \setminus [0, 1]$ y $[0, 1] \in \mathcal{T}$). Pero como ya hemos comentado en el apartado anterior $\mathcal{T}_{[2,3]}$ es la topología discreta en $[2, 3]$ y esta topología sabemos que no es compacta si el conjunto es infinito.

SEGUNDA FORMA: Consideramos el siguiente recubrimiento por abiertos (básicos) de X :

$$X = (0, 1] \cup \left(\bigcup_{x \in [2,3]} \{0, x\} \right)$$

Si omitimos un abierto de esta familia, ya no es un recubrimiento de X , pues quedarían puntos sin cubrir. Así que no podemos extraer ningún subrecubrimiento finito y, por tanto, el espacio no es compacto.

e) Se considera el conjunto $A = \{0\} \cup [2, 3]$. Determina si el espacio topológico cociente $(X/A, \mathcal{T}/A)$ es homeomorfo a $([0, 1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]})$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}$.

Veamos que $(X/A, \mathcal{T}/A)$ no es homeomorfo a $([0, 1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]})$.

PRIMERA FORMA: Veamos que $(X/A, \mathcal{T}/A)$ es un espacio topológico disconexo mientras que $([0, 1], \mathcal{T}_u|_{[0,1]})$ es conexo por ser un intervalo en $\mathbb{R}$ y la conexión es un invariante topológico. De las afirmaciones anteriores solo resta comprobar que $(X/A, \mathcal{T}/A)$ no es conexo. Denotemos $p : X \rightarrow X/A$ la proyección canónica. Observemos que podemos escribir

$$X/A = p(\{0\}) \cup p((0, 1])$$

y tanto $p(\{0\})$ como $p((0, 1])$ son abiertos, disjuntos y no vacíos ya que

$$p^{-1}(p(\{0\})) = A \in \mathcal{T}, \quad p^{-1}(p((0, 1])) = (0, 1] \in \mathcal{T}, \quad p(\{0\}) \cap p((0, 1]) = \emptyset$$

También se puede razonar que $p(\{0\})$ y $p((0, 1])$ son abiertos diciendo que se ha probado en teoría que si A es abierto la aplicación $p : X \rightarrow X/A$ es abierta.

SEGUNDA FORMA: También se puede argumentar que el espacio cociente $(X/A, \mathcal{T}/A)$ no es compacto, luego no puede ser homeomorfo a $([0, 1], \mathcal{T}_u|_{[0, 1]})$ que sí lo es. En efecto, un recubrimiento por abiertos de X/A es

$$X/A = p(\{0\}) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} p\left(\left(\frac{1}{n}, 1\right]\right) \right)$$

y no se puede extraer ningún subrecubrimiento finito.

- f) Se considera el conjunto $E = \{0, 1\} \cup [2, 3]$. Determina si el espacio topológico cociente $(X/E, \mathcal{T}/E)$ es homeomorfo a $([0, 1], \mathcal{T}_u|_{[0, 1]})$, donde $\mathcal{T}_u$ es la topología usual en $\mathbb{R}$.

Veamos que en este caso los espacios topológicos sí son homeomorfos. Consideremos la aplicación $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow ((0, 1], \mathcal{T}_u|_{(0, 1]})$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in (0, 1], \\ 1 & \text{si } x \in \{0\} \cup [2, 3]. \end{cases}$$

Claramente la aplicación f es sobreyectiva.

Observemos ahora que $A_1 = (0, 1]$ y $A_2 = \{0\} \cup [2, 3]$ son abiertos disjuntos. Además $f|_{A_1} = \text{Id} : (A_1, \mathcal{T}_{A_1}) \rightarrow (A_1, \mathcal{T}_u|_{A_1})$ que es continua porque como ya hemos comentado en el apartado a) se tiene $\mathcal{T}_{A_1} = \mathcal{T}_u|_{A_1}$ y $f|_{A_2} = c_1 : (A_2, \mathcal{T}_{A_2}) \rightarrow (A_2, \mathcal{T}_u|_{A_2})$ es una aplicación constante y por tanto continua. El Lema del pegado nos garantiza entonces que la aplicación f es continua.

Veamos ahora que f admite una inversa continua por la derecha y tendremos por un resultado de clase que f es una identificación. Usando de nuevo que $\mathcal{T}_{A_1} = \mathcal{T}_u|_{A_1}$ tenemos que la inclusión $i : (A_1, \mathcal{T}_{A_1}) \rightarrow (X, \mathcal{T})$ es una aplicación continua. Además $f \circ i = \text{Id}_{A_1}$ de donde se tiene que i es una inversa continua por la derecha de f y por tanto f es una identificación.

Por otra parte es obvio que $R = R_f$ y así la aplicación inducida por f en el cociente $\tilde{f} : (X/E, \mathcal{T}/E) \rightarrow ((0, 1], \mathcal{T}_u|_{(0, 1]})$ es un homeomorfismo.

Ejercicio 2. Un espacio topológico $(X, \mathcal{T})$ se dice T_3 si es T_1 y cumple que para cada subconjunto cerrado $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y cada punto $x \in X \setminus C$ existen abiertos $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $C \subset A_1$, $x \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

- a) Sea $(X, \mathcal{T})$ un espacio topológico T_1 . Demuestra que $(X, \mathcal{T})$ es T_3 si, y solo si, para cada punto $x \in X$ y cada abierto $U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$, existe un abierto $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset U$.

$\Rightarrow$ Sea $x \in X$ y $U \in \mathcal{T}$ con $x \in U$. Comprobemos que existe un abierto $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V$ y $\overline{V} \subset U$.

Denotemos $C = X \setminus U$ que es un cerrado de $(X, \mathcal{T})$ tal que $x \in X \setminus C$. Por la definición de T_3 tenemos entonces que existen abiertos $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales

que $C \subset A_1$, $x \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Veamos que el abierto $V = A_2$ es el que buscamos. Efectivamente, en primer lugar tenemos que $x \in V$. Por otra parte tenemos que $V = A_2 \subset X \setminus A_1$ que es un cerrado de $(X, \mathcal{T})$ y por tanto $\bar{V} \subset X \setminus A_1 \subset X \setminus C = U$.

$\Leftarrow$ Sean $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ y $x \in X \setminus C$. Veamos que existen abiertos $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $C \subset A_1$, $x \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$.

Denotemos $U = X \setminus C \in \mathcal{T}$ que verifica $x \in U$. Por hipótesis sabemos que existe un abierto $V \in \mathcal{T}$ tal que $x \in V$ y $\bar{V} \subset U$. Veamos que $A_1 = X \setminus \bar{V}$ y $A_2 = V$ son dos abiertos que verifican la condición de T_3 . Efectivamente observemos que en primer lugar $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$. Por otra parte $C = X \setminus U \subset X \setminus \bar{V} = A_1$, $x \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = (X \setminus \bar{V}) \cap V \subset (X \setminus V) \cap V = \emptyset$.

b) Demuestra que T_3 es un invariante topológico.

Tenemos que probar que si $f : (X, \mathcal{T}) \rightarrow (Y, \mathcal{T}')$ es un homeomorfismo y $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico T_3 entonces $(Y, \mathcal{T}')$ es también un espacio topológico T_3 .

Observemos en primer lugar que si $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico T_1 , por ser T_1 un invariante topológico, se tiene que $(Y, \mathcal{T}')$ es también un espacio topológico T_1 .

Consideremos ahora C' un cerrado de $(Y, \mathcal{T}')$ e $y \in Y \setminus C'$. Denotemos $x = f^{-1}(y)$ y $C = f^{-1}(C')$. Observemos que $C \in \mathcal{C}_{\mathcal{T}}$ por ser f continua y $x \in X \setminus C$. Por tanto como $(X, \mathcal{T})$ es un espacio topológico T_3 tenemos que existen abiertos $A_1, A_2 \in \mathcal{T}$ tales que $C \subset A_1$, $x \in A_2$ y $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Tenemos entonces que $A'_1 = f(A_1), A'_2 = f(A_2) \in \mathcal{T}'$ ya que al ser f un homeomorfismo es una aplicación abierta. Además como $C \subset A_1$ tenemos que $C' = f(C) \subset A'_1$, $y = f(x) \in A'_2$ y

$$A'_1 \cap A'_2 = f(A_1) \cap f(A_2) \stackrel{f \text{ inyectiva}}{=} f(A_1 \cap A_2) = f(\emptyset) = \emptyset.$$